



Solução
Editora
a solução para o seu concurso!

Volume II

Exame Nacional do Ensino Médio

ENEM

**MATEMÁTICA E SUAS
TECNOLOGIAS**

- ▶ EIXO 1 – Números e Operações
- ▶ EIXO 2 – Álgebra e Funções
- ▶ EIXO 3 – Geometria e Espaço
- ▶ EIXO 4 – Probabilidade e Estatística
- ▶ EIXO 5 – Modelagem e Problemas Contextualizados

BÔNUS DIGITAL

**100 QUESTÕES
COMENTADAS**



AVISO IMPORTANTE:

Este é um Material de Demonstração

Este arquivo é apenas uma amostra do conteúdo completo da Apostila.

Aqui você encontrará algumas páginas selecionadas para que possa conhecer a qualidade, estrutura e metodologia do nosso material. No entanto, **esta não é a apostila completa.**

POR QUE INVESTIR NA APOSTILA COMPLETA?

- ✖ Conteúdo totalmente alinhado ao edital
- ✖ Teoria clara, objetiva e sempre atualizada
- ✖ Questões gabaritadas
- ✖ Diferentes práticas que otimizam seus estudos

Ter o material certo em mãos transforma sua preparação e aproxima você da **APROVAÇÃO.**

Garanta agora o acesso completo e aumente suas chances de aprovação:
<https://www.editorasolucao.com.br/>



EIXO 1 – Números e Operações

1. Conjuntos numéricos	7
2. Razões, proporções	20
3. Porcentagem	21
4. Juros simples e compostos	23
5. Medidas e conversões	25

EIXO 2 – Álgebra e Funções

1. Expressões algébricas	39
2. Equações e inequações	41
3. Função do 1º e 2º grau	45
4. Função exponencial e logarítmica	52
5. Funções no cotidiano	59

EIXO 3 – Geometria e Espaço

1. Geometria plana. semelhança	75
2. Geometria espacial	85
3. Trigonometria	93
4. Áreas e perímetros	102
5. Aplicações geométricas no dia a dia	104

EIXO 4 – Probabilidade e Estatística

1. Análise combinatória	121
2. Probabilidade	124
3. Leitura e interpretação de gráficos e tabelas	127
4. Média, mediana, moda, desvio-padrão	133

EIXO 5 – Modelagem e Problemas Contextualizados

1. Modelagem matemática	147
2. Matemática financeira	150
3. Problemas ambientais (dados reais – interdisciplinar com natureza e humanas)	154
4. Matemática e tecnologia (informações digitais, dados, proporcionalidade)	156

EIXO 1 – NÚMEROS E OPERAÇÕES

CONJUNTOS NUMÉRICOS

O agrupamento de termos ou elementos que associam características semelhantes é denominado conjunto. Quando aplicamos essa ideia à matemática, se os elementos com características semelhantes são números, referimo-nos a esses agrupamentos como conjuntos numéricos.

Em geral, os conjuntos numéricos podem ser representados graficamente ou de maneira extensiva, sendo esta última a forma mais comum ao lidar com operações matemáticas. Na representação extensiva, os números são listados entre chaves {}. Caso o conjunto seja infinito, ou seja, contenha uma quantidade incontável de números, utilizamos reticências após listar alguns exemplos.

Exemplo: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.

Existem cinco conjuntos considerados essenciais, pois são os mais utilizados em problemas e questões durante o estudo da Matemática. Esses conjuntos são os Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais.

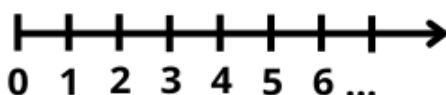
CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS ($\mathbb{N}$)

O conjunto dos números naturais é simbolizado pela letra N e compreende os números utilizados para contar e ordenar. Esse conjunto inclui o zero e todos os números positivos, formando uma sequência infinita.

Em termos matemáticos, os números naturais podem ser definidos como $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$

O conjunto dos números naturais pode ser dividido em subconjuntos:

- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ ou $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\}$: conjunto dos números naturais não nulos, ou sem o zero.
- $\mathbb{N}_p = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$, em que $n \in \mathbb{N}$: conjunto dos números naturais pares.
- $\mathbb{N}_i = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, em que $n \in \mathbb{N}$: conjunto dos números naturais ímpares.
- $\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$: conjunto dos números naturais primos.



► Operações com Números Naturais

Praticamente, toda a Matemática é edificada sobre essas duas operações fundamentais: adição e multiplicação.

Adição

A primeira operação essencial da Aritmética tem como objetivo reunir em um único número todas as unidades de dois ou mais números.

Exemplo: $6 + 4 = 10$, onde 6 e 4 são as parcelas e 10 é a soma ou o total.

Subtração

É utilizada quando precisamos retirar uma quantidade de outra; é a operação inversa da adição. A subtração é válida apenas nos números naturais quando subtraímos o maior número do menor, ou seja, quando $a - b$ tal que $a \geq b$.

Exemplo: $200 - 193 = 7$, onde 200 é o Minuendo, o 193 Subtraendo e 7 a diferença.

Obs.: o minuendo também é conhecido como aditivo e o subtraendo como subtrativo.

Multiplicação

É a operação que visa adicionar o primeiro número, denominado multiplicando ou parcela, tantas vezes quantas são as unidades do segundo número, chamado multiplicador.

Exemplo: $3 \times 5 = 15$, onde 3 e 5 são os fatores e o 15 produto. 3 vezes 5 é somar o número 3 cinco vezes:

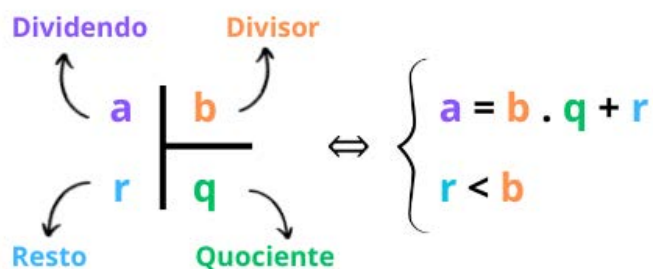
$$3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 15.$$

Podemos no lugar do “x” (vezes) utilizar o ponto “.”, para indicar a multiplicação.

Divisão

Dados dois números naturais, às vezes precisamos saber quantas vezes o segundo está contido no primeiro. O primeiro número, que é o maior, é chamado de dividendo, e o outro número, que é menor, é o divisor. O resultado da divisão é chamado de quociente. Se multiplicarmos o divisor pelo quociente e somarmos o resto, obtemos o dividendo.

No conjunto dos números naturais, a divisão não é fechada, pois nem sempre é possível dividir um número natural por outro número natural de forma exata. Quando a divisão não é exata, temos um resto diferente de zero.



Princípios fundamentais da divisão de números naturais:

- Em uma divisão exata de números naturais, o divisor deve ser menor do que o dividendo. Exemplo: $45 : 9 = 5$
- Em uma divisão exata de números naturais, o dividendo é o produto do divisor pelo quociente. Exemplo: $45 = 5 \times 9$
- A divisão de um número natural n por zero não é possível, pois, se admitíssemos que o quociente fosse q , então poderíamos escrever: $n \div 0 = q$ e isto significaria que: $n = 0 \times q = 0$ o que não é correto! Assim, a divisão de n por 0 não tem sentido ou ainda é dita impossível.

Propriedades da Adição e da Multiplicação de Naturais

Para todo a, b e c em $\mathbb{N}$

- Associativa da adição:** $(a + b) + c = a + (b + c)$
- Comutativa da adição:** $a + b = b + a$
- Elemento neutro da adição:** $a + 0 = a$
- Associativa da multiplicação:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Comutativa da multiplicação:** $a \cdot b = b \cdot a$
- Elemento neutro da multiplicação:** $a \cdot 1 = a$
- Distributiva da multiplicação relativamente à adição:** $a \cdot (b + c) = ab + ac$
- Distributiva da multiplicação relativamente à subtração:** $a \cdot (b - c) = ab - ac$
- Fechamento:** tanto a adição como a multiplicação de um número natural por outro número natural, continua como resultado um número natural.

Exemplo 1: Em uma gráfica, a máquina utilizada para imprimir certo tipo de calendário está com defeito, e, após imprimir 5 calendários perfeitos (P), o próximo sai com defeito (D), conforme mostra o esquema. Considerando que, ao se imprimir um lote com 5 000 calendários, os cinco primeiros saíram perfeitos e o sexto saiu com defeito e que essa mesma sequência se manteve durante toda a impressão do lote, é correto dizer que o número de calendários perfeitos desse lote foi

- (A) 3 642.
- (B) 3 828.
- (C) 4 093.
- (D) 4 167.
- (E) 4 256.

Resolução:

Vamos dividir 5000 pela sequência repetida (6):

$$5000 / 6 = 833 + \text{resto } 2.$$

Isto significa que saíram 833. 5 = 4165 calendários perfeitos, mais 2 calendários perfeitos que restaram na conta de divisão.

Assim, são 4167 calendários perfeitos.

Resposta: D.

Exemplo 2: João e Maria disputaram a prefeitura de uma determinada cidade que possui apenas duas zonas eleitorais. Ao final da sua apuração o Tribunal Regional Eleitoral divulgou a seguinte tabela com os resultados da eleição. A quantidade de eleitores desta cidade é:

	1ª Zona Eleitoral	2ª Zona Eleitoral
João	1750	2245
Maria	850	2320
Nulos	150	217
Branços	18	25
Abstenções	183	175

(A) 3995

(B) 7165

(C) 7532

(D) 7575

(E) 7933

Resolução:

Vamos somar a 1ª Zona: $1750 + 850 + 150 + 18 + 183 = 2951$

2ª Zona: $2245 + 2320 + 217 + 25 + 175 = 4982$

Somando os dois: $2951 + 4982 = 7933$

Resposta: E.

Exemplo 3: Uma escola organizou um concurso de redação com a participação de 450 alunos. Cada aluno que participou recebeu um lápis e uma caneta. Sabendo que cada caixa de lápis contém 30 unidades e cada caixa de canetas contém 25 unidades, quantas caixas de lápis e de canetas foram necessárias para atender todos os alunos?

(A) 15 caixas de lápis e 18 caixas de canetas.

(B) 16 caixas de lápis e 18 caixas de canetas.

(C) 15 caixas de lápis e 19 caixas de canetas.

(D) 16 caixas de lápis e 19 caixas de canetas.

(E) 17 caixas de lápis e 19 caixas de canetas.

Resolução:

Número de lápis: 450. Dividindo pelo número de lápis por caixa: $450 \div 30 = 15$

Número de canetas: 450. Dividindo pelo número de canetas por caixa: $450 \div 25 = 18$.

Resposta: A.

EIXO 2 – ÁLGEBRA E FUNÇÕES

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

EXPRESSÕES ALGÉBRICAS

As expressões algébricas são combinações de números, letras e operações matemáticas. Elas servem para representar situações em que nem todos os valores são conhecidos, sendo muito utilizadas em fórmulas e equações.

► Elementos de uma expressão algébrica

- **Variáveis:** são as letras que representam valores desconhecidos ou que podem variar.
- **Coefficientes:** são os números colocados antes das letras, indicando quantas vezes a variável é multiplicada.

► Simplificação de expressões algébricas

Podemos simplificar uma expressão algébrica somando ou subtraindo os termos semelhantes, ou seja, aqueles que possuem a mesma parte literal (as mesmas letras com os mesmos expoentes).

Para isso, somamos ou subtraímos apenas os coeficientes e mantemos a parte literal igual.

Exemplos:

$$\bullet ab - 3cd + 2ab - ab + 3cd + 5ab = (ab + 2ab - ab + 5ab) + (-3cd + 3cd) = 7ab$$

$$\bullet 3xy + 7xy^4 - 6x^3y + 2xy - 10xy^4 = (3xy + 2xy) + (7xy^4 - 10xy^4) - 6x^3y = 5xy - 3xy^4 - 6x^3y$$

► Fatoração de expressões algébricas

Fatorar uma expressão algébrica significa reescrevê-la como um produto de fatores, ou seja, transformá-la em uma multiplicação equivalente entre termos.

Podemos aplicar diferentes casos de fatoração, conforme a forma da expressão. Alguns deles utilizam produtos notáveis, que são fórmulas conhecidas de multiplicação e ajudam a reconhecer padrões durante o processo de fatoração:

$$\bullet \text{Fator comum em evidência: } ax + bx = x \cdot (a + b)$$

$$\bullet \text{Agrupamento: } ax + bx + ay + by = x \cdot (a + b) + y \cdot (a + b) = (x + y) \cdot (a + b)$$

$$\bullet \text{Trinômio Quadrado Perfeito (Adição): } a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

$$\bullet \text{Trinômio Quadrado Perfeito (Diferença): } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

$$\bullet \text{Diferença de dois quadrados: } (a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

$$\bullet \text{Cubo Perfeito (Soma): } a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3$$

$$\bullet \text{Cubo Perfeito (Diferença): } a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3$$

Exemplo: (PREF. MOGEIRO/PB)

Simplificando a expressão

$$(a^2b + ab^2) \cdot \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

Obtemos:

$$(A) a + b.$$

$$(B) a^2 + b^2.$$

$$(C) ab.$$

$$(D) a^2 + ab + b^2.$$

$$(E) b - a.$$

Resolução:

$$(a^2b + ab^2) \cdot \frac{\frac{1}{a^3} - \frac{1}{b^3}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

$$= ab(a + b) \cdot \frac{\frac{b^3 - a^3}{a^3b^3}}{\frac{b^2 - a^2}{a^2b^2}}$$

$$= ab(a + b) \cdot \frac{a^2b^2(b^3 - a^3)}{a^3b^3(b^2 - a^2)}$$

$$= (a + b) \cdot \frac{(b^3 - a^3)}{(b^2 - a^2)}$$

$$= (a + b) \cdot \frac{(b - a)(b^2 + ab + a^2)}{(b - a)(a + b)} = a^2 + ab + b^2$$

Resposta: D.

► **Propriedades importantes das equações algébricas**

- Toda equação algébrica de grau n possui exatamente n raízes.
- Se b for uma raiz de $P(x) = 0$, então $P(x)$ é divisível por $(x - b)$. Essa propriedade é muito útil para reduzir o grau de uma equação, aplicando o método de Briot-Ruffini.
- Se um número complexo $(a + bi)$ for raiz de $P(x) = 0$, então o conjugado $(a - bi)$ também será raiz.
- Se a equação $P(x) = 0$ possuir k raízes iguais a m , dizemos que m é uma raiz de multiplicidade k .
- Se a soma dos coeficientes de uma equação algébrica $P(x) = 0$ for nula, então $x = 1$ é raiz da equação.
- Toda equação com termo independente igual a zero admite um número de raízes nulas igual ao menor expoente da variável.

► **Relações de Girard**

As Relações de Girard expressam as ligações entre os coeficientes e as raízes de uma equação algébrica.

Seja a equação:

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$$

com $a_0 \neq 0$ e raízes $r_1, r_2, r_3, \dots, r_n$, valem as seguintes relações:

$$\begin{aligned} r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_n &= -\frac{a_1}{a_0} \\ r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3 + \dots + r_{n-1} \cdot r_n &= \frac{a_2}{a_0} \\ r_1 r_2 r_3 + \dots + r_{n-2} r_{n-1} r_n &= -\frac{a_3}{a_0} \\ &\vdots \\ r_1 r_2 r_3 \dots r_n &= (-1)^n \cdot \frac{a_n}{a_0} \end{aligned}$$

Atenção

As Relações de Girard são úteis apenas quando já conhecemos alguma informação sobre as raízes da equação. Sozinhas, elas não permitem resolver a equação completamente.

Exemplo: (UFSCAR-SP)

Sabendo-se que a soma de duas das raízes da equação $x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$ é igual a 5, pode-se afirmar a respeito das raízes que:

- (A) são todas iguais e não nulas.
- (B) somente uma raiz é nula.
- (C) as raízes constituem uma progressão geométrica.
- (D) as raízes constituem uma progressão aritmética.
- (E) nenhuma raiz é real.

Resolução:

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = 0$$

Raízes: x_1, x_2 e x_3

$$\text{Informação: } x_1 + x_2 = 5$$

$$\text{Girard: } x_1 + x_2 + x_3 = 7 \rightarrow 5 + x_3 = 7 \rightarrow x_3 = 2$$

Sabendo que $x = 2$ é uma raiz, substituímos o valor na equação para encontrar o quociente:

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 8 = (x - 2)(x^2 - 5x + 4)$$

Resolvendo o fator quadrático:

$$x^2 - 5x + 4 = 0 \rightarrow x = 1 \text{ ou } x = 4$$

$$\text{Logo } S = \{1, 2, 4\}$$

As raízes formam uma progressão geométrica.

Resposta: C

FIQUE DE OLHO

A banca raramente quer que você “resolva tudo”. Ela quer que você use propriedade estratégica.

Conexões interdisciplinares:

- ENEM trabalha interpretação algébrica em Física (funções), Química (equilíbrios) e até em Redação ao discutir modelagens matemáticas.
- Em concursos, aparece em RLM e também em Estatística (polinômios característicos).

Pegadinha clássica: O candidato usa Girard sem perceber que precisa de informação parcial das raízes. Girard não resolve sozinho — apenas relaciona coeficientes e raízes.

Outra armadilha: esquecer que o grau indica número total de raízes incluindo complexas e repetidas. A banca explora isso para induzir erro ao contar apenas raízes reais.

Mentalidade de prova: antes de calcular, pergunte: qual propriedade elimina etapas?

► **Teorema das Raízes Racionais**

O Teorema das Raízes Racionais é um método utilizado para identificar possíveis raízes racionais de uma equação polinomial com coeficientes inteiros. Segundo o teorema:

Se um número racional p/q , com p e q primos entre si (ou seja, em forma irredutível), é raiz da equação, então:

- p é divisor do termo independente;
- q é divisor do coeficiente do termo de maior grau.

Exemplo: Verifique se a equação $x^3 - x^2 + x - 6 = 0$ possui raízes racionais.

Pelo Teorema das Raízes Racionais, p deve ser divisor de -6 e q divisor de 1. Assim, os possíveis valores de p/q são $\pm 1, \pm 2, \pm 3$ e ± 6 .

Substituindo na equação $x^3 - x^2 + x - 6 = 0$, verificamos que $x=2$ é raiz, pois $8 - 4 + 2 - 6 = 0$. Como o polinômio é de grau 3, podemos fatorar $x^3 - x^2 + x - 6 = (x-2)(x^2+x+3)$. O segundo fator não possui raízes reais, logo a única raiz racional é $x=2$.

EIXO 3 – GEOMETRIA E ESPAÇO

GEOMETRIA PLANA. SEMELHANÇA

FUNDAMENTOS DA GEOMETRIA

A geometria foi, durante muito tempo, a principal área desenvolvida da matemática. Isso se deve ao fato de que seus conceitos são inspirados em elementos concretos do mundo físico, como pontos, linhas e superfícies.

Sua principal referência histórica é o livro Elementos, escrito por Euclides por volta de 300 a.C.. Mesmo assim, não conseguimos representar figuras geométricas perfeitas (como retas, círculos e quadrados), pois esses elementos pertencem a um espaço bidimensional, enquanto vivemos em um mundo tridimensional.

► Elementos Fundamentais

Os elementos fundamentais da geometria são chamados de entes primitivos. Eles são assim denominados porque não possuem definição formal, mas servem de base para todos os outros conceitos geométricos.

Ponto



- Adimensional (0 dimensões);
- Não possui largura, altura ou profundidade;
- O ponto é representado por letras latinas maiúsculas: A, B, R, P, Z, entre outras.

Reta

r

- Unidimensional (1 dimensão);
- Possui apenas largura;
- A reta é representada por letras latinas minúsculas: r, s, t, x, entre outras.

Plano:



- Bidimensional (2 dimensões);
- Possui largura e profundidade;
- O plano é representado por letras gregas minúsculas: α , β , γ entre outras.

► Postulados e Teoremas de Euclides

A geometria desenvolvida por Euclides é baseada em axiomas (ou postulados) e teoremas, formando o que chamamos de Geometria Euclidiana. A palavra “axioma” vem do grego e significa “verdade evidente por si mesma”, ou seja, uma proposição aceita sem necessidade de demonstração. A partir desses axiomas, Euclides construiu teoremas, que são proposições demonstráveis por meio da lógica e de postulados anteriores.

Axiomas de Euclides

São os 5 axiomas de Euclides:

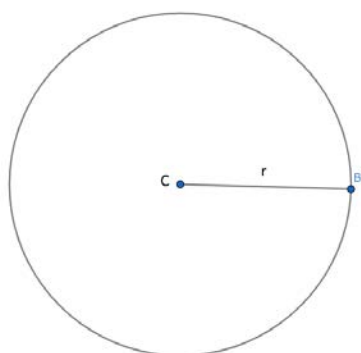
- **Axioma I:** Entre dois pontos passa-se uma única reta.



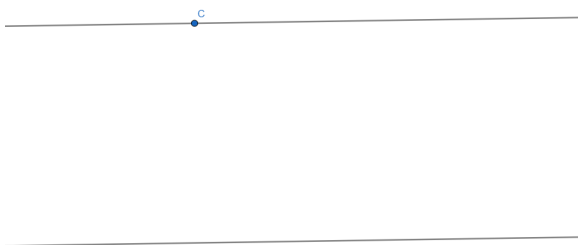
- **Axioma II:** Uma reta finita pode ser prolongada indefinidamente em linha reta.



- **Axioma III:** Dado um ponto e uma distância (raio), é possível traçar um círculo.



- **Axioma IV:** Todos os ângulos retos são iguais entre si.
- **Axioma V:** Por um ponto fora de uma reta, passa uma única reta paralela à reta dada.



Duas retas são consideradas paralelas quando não se encontram em nenhum ponto, ou, em linguagem geométrica, quando se encontram apenas “no infinito”.

RETAS E PONTOS

Os pontos e as retas são os elementos mais simples e fundamentais da Geometria. A disposição dos pontos no espaço pode formar alinhamentos (quando estão sobre uma mesma reta) ou planos (quando pertencem a uma mesma superfície). Vamos conhecer essas possibilidades.

- **Pontos colineares:** Dois ou mais pontos são ditos colineares se por eles passa uma única reta contendo todos eles.



- **Pontos coplanares:** Três ou mais pontos são coplanares se por eles passa um plano contendo todos eles.



► Posições relativas entre um ponto e uma reta

Um ponto pode se relacionar com uma reta de diferentes formas no espaço:

- **Um ponto pode pertencer a uma reta:** O ponto está sobre a reta. Na Figura abaixo $P \in r$.



- **Um ponto pode não pertencer a uma reta:** O ponto está fora da reta. Na Figura abaixo $P \notin r$.



- **Em uma reta há infinitos pontos.**



EIXO 4 – PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

ANÁLISE COMBINATÓRIA

A análise combinatória é a parte da Matemática que desenvolve meios para trabalharmos com problemas de contagem. Vejamos eles:

► Princípio fundamental de contagem (PFC)

É o total de possibilidades de o evento ocorrer.

▪ **Princípio multiplicativo:** $P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot \dots \cdot P_n$ (regra do “e”). É um princípio utilizado em sucessão de escolha, como ordem.

▪ **Princípio aditivo:** $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n$ (regra do “ou”). É o princípio utilizado quando podemos escolher uma coisa ou outra.

Exemplo 1: (BNB)

Apesar de todos os caminhos levarem a Roma, eles passam por diversos lugares antes. Considerando-se que existem três caminhos a seguir quando se deseja ir da cidade A para a cidade B, e que existem mais cinco opções da cidade B para Roma, qual a quantidade de caminhos que se pode tomar para ir de A até Roma, passando necessariamente por B?

- (A) Oito.
- (B) Dez.
- (C) Quinze.
- (D) Dezesseis.
- (E) Vinte.

Resolução:

Observe que temos uma sucessão de escolhas:

Primeiro, de A para B e depois de B para Roma.

1ª possibilidade: 3 (A para B).

Obs.: o número 3 representa a quantidade de escolhas para a primeira opção.

2ª possibilidade: 5 (B para Roma).

Temos duas possibilidades: A para B depois B para Roma, logo, uma sucessão de escolhas.

Resultado: $3 \cdot 5 = 15$ possibilidades.

Resposta: C.

Exemplo 2: (IOBV)

Em um restaurante os clientes têm a sua disposição, 6 tipos de carnes, 4 tipos de cereais, 4 tipos de sobremesas e 5 tipos de sucos. Se o cliente quiser pedir 1 tipo carne, 1 tipo de cereal, 1 tipo de sobremesa e 1 tipo de suco, então o número de opções diferentes com que ele poderia fazer o seu pedido, é:

- (A) 19
- (B) 480
- (C) 420
- (D) 90

Resolução:

A questão trata-se de princípio fundamental da contagem, logo vamos enumerar todas as possibilidades de fazermos o pedido:

$$6 \times 4 \times 4 \times 5 = 480 \text{ maneiras.}$$

Resposta: B.

► Fatorial

Sendo n um número natural, chama-se de $n!$ (lê-se: n fatorial) a expressão:

$$n! = n (n - 1) (n - 2) (n - 3) \dots \cdot 2 \cdot 1, \text{ como } n \geq 2.$$

Exemplos:

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

$$7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5.040.$$

Além disso, por definição:

- $0! = 1$
- $1! = 1$

► Arranjo simples

Arranjo simples de n elementos tomados p a p , onde $n \geq 1$ e p é um número natural, é qualquer ordenação de p elementos dentre os n elementos, em que cada maneira de tomar os elementos se diferenciam pela ordem e natureza dos elementos.

Atenção: Observe que no grupo dos elementos: $\{1, 2, 3\}$ um dos arranjos formados, com três elementos, 123 é DIFERENTE de 321, e assim sucessivamente.

Sem repetição

A fórmula para cálculo de arranjo simples é dada por:

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Onde:

n = Quantidade total de elementos no conjunto.

p = Quantidade de elementos por arranjo

Exemplo: Uma escola possui 18 professores. Entre eles, serão escolhidos: um diretor, um vice-diretor e um coordenador pedagógico. Quantas as possibilidades de escolha?

$n = 18$ (professores)

$p = 3$ (cargos de diretor, vice-diretor e coordenador pedagógico)

$$A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!} \rightarrow A_{18,3} = \frac{18!}{(18-3)!} = \frac{18!}{15!} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = 4896$$

Portanto, 4896 possibilidades.

Com repetição

Os elementos que compõem o conjunto podem aparecer repetidos em um agrupamento, ou seja, ocorre a repetição de um mesmo elemento em um agrupamento.

A fórmula geral para o arranjo com repetição é representada por:

$$A_{n,p} = n^p$$

Exemplo: Seja P um conjunto com elementos: $P = \{A, B, C, D\}$, tomando os agrupamentos de dois em dois, considerando o arranjo com repetição quantos agrupamentos podemos obter em relação ao conjunto P .

Resolução:

$P = \{A, B, C, D\}$

$n = 4$

$p = 2$

$A(n,p) = n^p$

$A(4,2) = 4^2 = 16$

► Permutação

É a troca de posição de elementos de uma sequência. Utilizamos todos os elementos.

Sem repetição

$$P_n = n!$$

Atenção: Todas as questões de permutação simples podem ser resolvidas pelo princípio fundamental de contagem (PFC).

Exemplo : (IDECAN)

Renato é mais velho que Jorge de forma que a razão entre o número de anagramas de seus nomes representa a diferença entre suas idades. Se Jorge tem 20 anos, a idade de Renato é

(A) 24.

(B) 25.

(C) 26.

(D) 27.

(E) 28.

Resolução:

Anagramas de RENATO

$$\frac{6!}{2!} = 720$$

Anagramas de JORGE

$$\frac{5!}{2!} = 120$$

Razão dos anagramas: $720/120=6$

Se Jorge tem 20 anos, Renato tem $20+6=26$ anos.

Resposta: C.

Com repetição

Na permutação com elementos repetidos ocorrem permutações que não mudam o elemento, pois existe troca de elementos iguais. Por isso, o uso da fórmula é fundamental.

$$P_n^{(\alpha, \beta, \dots, \gamma)} = \frac{n!}{\alpha! \beta! \dots \gamma!}$$

Exemplo: (CESPE) Considere que um decorador deva usar 7 faixas coloridas de dimensões iguais, pendurando-as verticalmente na vitrine de uma loja para produzir diversas formas. Nessa situação, se 3 faixas são verdes e indistinguíveis, 3 faixas são amarelas e indistinguíveis e 1 faixa é branca, esse decorador conseguirá produzir, no máximo, 140 formas diferentes com essas faixas.

() CERTO

() ERRADO

Resolução:

Total: 7 faixas, sendo 3 verdes e 3 amarelas.

$$P_7^{3,3} = \frac{7!}{3!3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = \frac{840}{6} = 140$$

Resposta: Certo.

Circular

A permutação circular é formada por pessoas em um formato circular. A fórmula é necessária, pois existem algumas permutações realizadas que são iguais. Usamos sempre quando:

EIXO 5 – MODELAGEM E PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS

MODELAGEM MATEMÁTICA

MODELAGEM MATEMÁTICA

A modelagem matemática é uma técnica que pode ser aplicada no ensino da Matemática em todos os níveis, com relatos de utilização anteriores à década de 1980. Quando utilizada, muitos questionamentos são feitos no contexto de sua adequação aos programas curriculares e também em nível metodológico.

Atualmente a modelagem matemática tem sido usada com frequência em experimentos nos cursos de pós-graduação, criando muitas expectativas referentes ao seu uso. Ainda não se constata uma sistemática geral de utilização, mas podemos encontrar vários exemplos de aplicações bem-sucedidas.

Ao contrário do que se possa imaginar, o uso da modelagem matemática não é recente. Pesquisadores buscam as raízes da modelagem analisando a história da ciência e seus grandes pensadores. Por exemplo, Biembengut mostra textos históricos de aproximadamente 1200 a.C., que apontam problemas cujas soluções culminaram com a elaboração dos primeiros modelos matemáticos.

Porém, foi no início do século XX que a modelagem foi muito utilizada na resolução de problemas de Biologia e de Economia. A partir da década de 1980 encontram-se vários exemplos de utilização da modelagem nas aulas de Matemática. Neste período a modelagem se consolidou como uma abordagem pedagógica.

Chegamos mais perto da definição de modelagem matemática que, de maneira bem simples, nada mais é do que o processo utilizado para a obtenção de modelos matemáticos. A seguir apresentam-se algumas definições de autores para a modelagem matemática:

Para Bienbengut e Hein, modelagem é a arte de expressar, por intermédio da linguagem matemática, situações-problema reais. É um processo que emerge da própria razão e participa da nossa vida como forma de constituição e de expressão do conhecimento.

Para Bassanezi, modelagem é uma nova forma de encarar a Matemática e consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

Para Lopes e Borba, é uma maneira de tentar entender a matemática no cotidiano, de traduzir um problema real para a linguagem matemática.

Para Davis, a modelagem é caracterizada como a forma com que fazemos as coisas e é um processo fundamental para o sucesso da humanidade nos diferentes segmentos da sociedade.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, publicados em 1998 pelo Ministério da Educação, mencionam a modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos têm a possibilidade de utilizar a Matemática para indagar e/ou investigar situações oriundas de outras áreas da realidade. A abordagem, que considera a modelagem como um ambiente de aprendizagem, vem sendo também defendida por pesquisadores como Ole Skovsmose, da Universidade de Aalborg na Dinamarca, e Jonei Cerqueira Barbosa, da Universidade Católica de Salvador no Brasil.

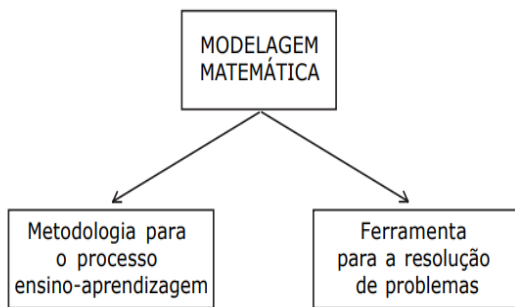
Skovsmose coloca que o ambiente de aprendizagem que caracteriza a modelagem faz um convite aos alunos que são estimulados a desenvolver atividades. Destaca que o convite por si só não garante o envolvimento dos alunos nas atividades propostas. Isto só acontecerá se os seus interesses forem abordados no ambiente.

Também, Barbosa ressalta que esse ambiente de aprendizagem estimula explorações e investigações matemáticas de situações de outras áreas que não a Matemática. O autor concorda com Skovsmose que, para um maior envolvimento dos alunos, é importante trabalhar com situações ligadas aos seus interesses. Assim, o trabalho com situações fictícias ou artificiais, mesmo que envolva os alunos em ricas discussões, não deve ser privilegiado.

O trabalho com situações reais colocará os alunos frente a problemas que efetivamente dizem respeito a um contexto social e cultural vivenciado em determinado momento da história da humanidade. Pode-se enfatizar a importância da modelagem quando possibilita a conexão de conteúdos matemáticos com outras áreas do conhecimento.

Trabalha-se numa das questões importantes do processo ensino-aprendizagem da Matemática, que diz respeito ao interesse do aluno em visualizar aplicações práticas, ligadas ao seu dia-a-dia. O uso da modelagem pode propiciar esta conexão, além de ampliar o conhecimento matemático, ajudando a estruturar a maneira de pensar e agir do aluno.

A modelagem pode ser utilizada em dois contextos específicos: como ferramenta na resolução de problemas e como metodologia para o processo ensino-aprendizagem da Matemática.



<https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/22126/1/fulltext.pdf>

DICA RÁPIDA

Modelagem Matemática = Traduzir a realidade para a linguagem da Matemática e voltar com uma solução validada.

Roteiro em 3 etapas (Biembengut e Hein):

- Interação
 - Identifique a situação-problema real.
 - Levante dados e referencial teórico.
- Matematização
 - Selecione variáveis e constantes.
 - Estabeleça hipóteses.
 - Construa relações (equações, gráficos, tabelas).
 - Resolva com ferramentas matemáticas.
- Modelo e Validação
 - Interprete o resultado no contexto real.
 - Pergunte: a solução é adequada? É aplicável?

Macete:

Real → Variáveis → Equações → Solução → Validação.
Sem validação, não há modelagem completa.

► Modelo Matemático

Conforme o contexto, a palavra modelo possui vários significados. De forma geral, pode-se dizer que um modelo é uma representação simplificada de algum fenômeno ou situação real. Mas e o modelo matemático?

O modelo matemático é uma representação simplificada, porém tendo como característica o uso de um conjunto de símbolos e relações matemáticas. Desta forma, representa o objeto ou fenômeno estudado, ou ainda, o problema proveniente de uma situação real.

Muitas situações do mundo real podem apresentar problemas que precisam ser resolvidos. Por exemplo, o problema de cálculo do juro cobrado por uma instituição financeira em razão de determinado empréstimo, contém fatos matemáticos relativamente simples e envolve uma matemática elementar.

Um modelo matemático pode ser formulado a partir de expressões numéricas ou fórmulas, diagramas ou tabelas, expressões algébricas ou ainda representações gráficas. Os programas computacionais podem ajudar muito na apresentação e

obtenção de um modelo. É importante, porém, que tenha uma linguagem concisa e que expresse as ideias de maneira clara e sem ambiguidades.

Vejam alguns modelos de aeronaves. Observa-se que, a partir de cada modelo podemos delinear somente algumas características do objeto real.

Percebe-se que estes não são modelos matemáticos:



<https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/22126/1/fulltext.pdf>

Agora veja-se um modelo matemático. Trata-se de um modelo para a dinâmica populacional de uma nova colmeia de abelhas.

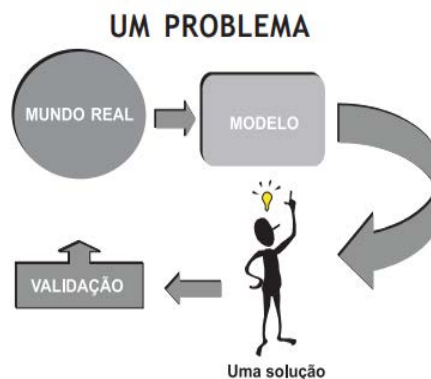
É descrito da seguinte forma: o crescimento populacional de uma colmeia é proporcional à diferença entre a população máxima sustentável e a população dada em cada instante.

$$y(t) = -72500e^{-0,02532(t-21)} + 80000$$

para $t \geq 21$

<https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/22126/1/fulltext.pdf>

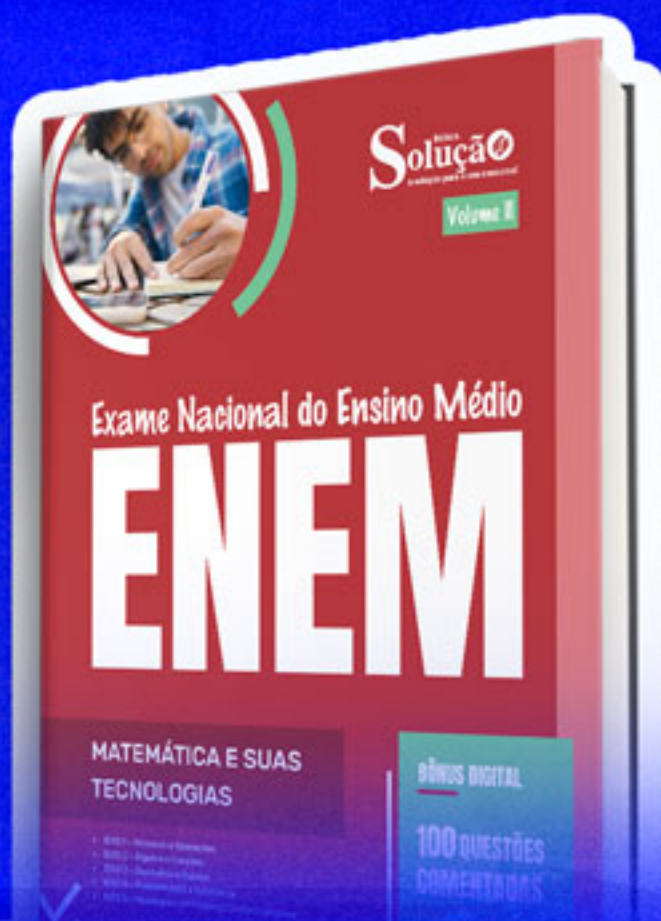
Para se chegar neste modelo é necessário resolver uma equação diferencial de primeira ordem. No contexto da modelagem matemática, um modelo fica inserido num processo de decisão, na solução de um problema real, permitindo relacionar os diversos elementos de forma mais simples que o real.



<https://repositorio.animaeducacao.com.br/bitstream/ANIMA/22126/1/fulltext.pdf>

Diante de um problema do mundo real é possível selecionar variáveis e delinear o modelo. Por sua vez, o modelo produz informações importantes para a criação de alternativas de solução. A partir de referenciais teóricos, pode-se escolher a melhor alternativa, obtendo assim uma solução.

Como a solução é encontrada a partir de um modelo é necessária a validação, ou seja, a verificação da solução encontrada. A ideia é responder a perguntas como:



GOSTOU DESSE MATERIAL?

Então não pare por aqui: a versão **COMPLETA** vai te deixar ainda mais perto da sua aprovação e da tão sonhada estabilidade. Aproveite o **DESCONTO EXCLUSIVO** que liberamos para Você!

EU QUERO DESCONTO!